

Шәкір Айдос



Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы, Қазақстан

e-mail: ajdossakir@gmail.com

10-дәріс. Параболалық теңдеу. Шектеулі аймақ үшін максимум қағидасы. Параболалық теңдеуге қойылған Коши есебі.**Дәрістің мақсаты** – Параболалық теңдеу үшін қойылған Коши есебінің шешімін табу**Негізгі сұрақтар:**

1. Параболалық теңдеу үшін Коши есебінің шешімі
2. Шенелген облыс үшін максимум қағидасы

Параболалық теңдеулер (мысалы, жылуөткізгіштік теңдеуі) үшін максимум қағидасы шешімнің шекарада немесе бастапқы уақытта максималды және минималды мәнге жететінін көрсетеді. Бұл қағида шешімнің қасиеттерін бағалауда және біртекті емес теңдеулерді талдауда маңызды.

1 Есептің қойылымы

Қарастырайық бір өлшемді біртекті жылуөткізгіштік теңдеуді:

$$u_t = \alpha^2 u_{xx}, \quad (x, t) \in \Omega_T = (a, b) \times (0, T], \quad (1.1)$$

бастапқы шарт

$$u(x, 0) = f(x), \quad a \leq x \leq b, \quad (1.2)$$

шеттік шарттар

$$u(a, t) = g_1(t), \quad u(b, t) = g_2(t), \quad 0 \leq t \leq T. \quad (1.3)$$

2 Максимум қағидасы

Теорема 2.1 (Параболалық максимум қағидасы). Егер $u \in C^{2,1}([a, b] \times [0, T])$ теңдеуге (1.1) сәйкес келсе, онда

$$\max_{(x,t) \in [a,b] \times [0,T]} u(x, t) = \max \left\{ \max_{x \in [a,b]} u(x, 0), \max_{t \in [0,T]} u(a, t), \max_{t \in [0,T]} u(b, t) \right\}.$$

Яғни, максималды мән тек шекарада немесе бастапқы уақытта пайда болады.

3 Дәлелдеу (идея)

1. Ішкі максимум бар болсын: $u(x_0, t_0) = M$, мұндағы $x_0 \in (a, b)$, $t_0 \in (0, T]$. 2. Ішкі максимум нүктесінде:

$$u_x(x_0, t_0) = 0, \quad u_{xx}(x_0, t_0) \leq 0, \quad u_t(x_0, t_0) \geq 0.$$

3. Параболалық теңдеуден (1.1):

$$u_t(x_0, t_0) = \alpha^2 u_{xx}(x_0, t_0) \leq 0.$$

4. Сонымен, $u_t(x_0, t_0) = 0$ және $u_{xx}(x_0, t_0) = 0$. 5. Бұл тұрақты емес функция үшін мүмкін емес. Сондықтан u ішкі нүктеде максимумға жетпейді. 6. Қорытынды: максимум тек шекарада немесе бастапқы уақытта болады.

4 Қолданылуы

4.1 Бастапқы-шеттік есептерді бағалау

Мысалы, егер

$$f(x) \leq M_0, \quad g_1(t) \leq M_1, \quad g_2(t) \leq M_2,$$

онда шешім $u(x, t)$ үшін

$$u(x, t) \leq \max\{M_0, M_1, M_2\}, \quad \forall (x, t) \in [a, b] \times [0, T].$$

4.2 Физикалық интерпретация

Жылу таралу процесінде температура ешқашан сыртқы жылу көзінсіз ішкі нүктелерде шекарадан жоғары мәнге жетпейді.

5 Нәтиже

Максимум қағидасы параболалық теңдеулер үшін шешімнің шекара және бастапқы шарттарға тәуелді екенін дәлелдейді, бұл шешімнің қасиеттерін бағалауға мүмкіндік береді.

6 Мысал: Бір өлшемді жылуөткізгіштік теңдеу

Қарастырайық бір өлшемді жылуөткізгіштік теңдеуді:

$$u_t = u_{xx}, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0, \quad (6.1)$$

бастапқы және шеттік шарттар:

$$u(x, 0) = \sin(\pi x), \quad u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 0. \quad (6.2)$$

7 Шешім

Бұл біртекті теңдеудің шешімі Фурье әдісі бойынша табылады:

$$u(x, t) = e^{-\pi^2 t} \sin(\pi x). \quad (7.1)$$

8 Максимум қағидасын тексеру

- Бастапқы уақыттағы максимум:

$$\max_{0 \leq x \leq 1} u(x, 0) = \max_{0 \leq x \leq 1} \sin(\pi x) = 1.$$

- Шекарадағы мәндер:

$$u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 0, \quad \forall t \geq 0.$$

- Ішкі нүктелерде:

$$0 < u(x, t) = e^{-\pi^2 t} \sin(\pi x) \leq 1, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0.$$

Сондықтан, шешімнің максимум мәні тек бастапқы уақытта немесе шекарада пайда болады. Бұл параболалық теңдеулер үшін максимум қағидасын растайды.

Теорема 1 (Максимум принципі)

Егер функция $u(x, t) \in C_{x,t}^{2,1}(\overline{V_T})$ класына жатса және V_T -де біртекті жылу өткізгіштік теңдеуін қанағаттандырса:

$$u_t(x, t) - a^2 \Delta_x u(x, t) = 0,$$

онда кез келген $(x, t) \in V_T$ нүктесі үшін келесі теңсіздік орындалады:

$$\inf_{D_0 \cup S_T} u \leq u(x, t) \leq \sup_{D_0 \cup S_T} u,$$

мұндағы

$$D_0 = \{(x, t) : x \in D, t = 0\}, \quad S_T = \{(x, t) : x \in \partial D, 0 < t \leq T\}, \quad V_T = \{(x, t) : x \in D, 0 < t \leq T\}.$$

Дәлелдеу

Жалпы жағдайды шектемей-ақ, $\sup_{V_T} u > 0$ деп аламыз, өйткені егер $u(x, t)$ берілген теңсіздіктерді қанағаттандырса, онда $u(x, t) + \text{const}$ функциясы да сол теңсіздіктерді қанағаттандырады.

$\lambda > 0$ болсын — кез келген оң сан. $w(x, t) = u(x, t)e^{-\lambda t}$ функциясын қарастырайық. Ол V_T -де келесі теңдеуді қанағаттандырады:

$$L_\lambda w(x, t) = w_t(x, t) - a^2 \Delta_x w(x, t) + \lambda w(x, t) \leq 0.$$

Сондықтан, Лемма 1 бойынша келесі теңсіздік орындалады:

$$e^{-\lambda t} u(x, t) \leq \sup_{(\xi, \tau) \in D_0 \cup S_T} e^{-\lambda \tau} u(\xi, \tau), \quad (x, t) \in V_T.$$

$\lambda \rightarrow +0$ кезінде шекке өтсек, аламыз:

$$u(x, t) \leq \sup_{(\xi, \tau) \in D_0 \cup S_T} u(\xi, \tau), \quad (x, t) \in V_T.$$

Осылайша теорема дәлелденді. $\square$

Лемма 1

$w(x, t)$ функциясы $C_{x,t}^{2,1}(\overline{V_T})$ класына жатсын және V_T -де келесі теңсіздікті қанағаттандырсын:

$$L_\lambda w(x, t) = w_t(x, t) - a^2 \Delta_x w(x, t) + \lambda w(x, t) \leq 0,$$

мұндағы $\lambda > 0$. Егер $\sup_{\overline{V_T}} w(x, t) > 0$ болса, онда кез келген $(x, t) \in V_T$ үшін келесі теңсіздік орындалады:

$$w(x, t) \leq \sup_{D_0 \cup S_T} w(x, t).$$

Лемма 1-дің дәлелдемесі

Алдымен $w(x, t)$ функциясы $\overline{V_T}$ -де үздіксіз екенін байқаймыз. Сондықтан оның

$$\sup_{\overline{V_T}} w$$

мәні шекті және кем дегенде бір нүктеде жетеді. Бұл мән V_T -нің ішкі нүктесінде жетпейтінін білдіреді.

Яғни, егер

$$w(x_0, t_0) = \sup_{\overline{V_T}} w,$$

болса, онда максимум үшін қажетті шарттар орындалады:

$$w_t(x_0, t_0) = 0, \quad \Delta_x w(x_0, t_0) \leq 0.$$

Бұларды теңсіздікке қойсақ:

$$w_t(x_0, t_0) - a^2 \Delta_x w(x_0, t_0) + \lambda w(x_0, t_0) < 0,$$

немесе

$$\lambda w(x_0, t_0) < 0,$$

яғни $w(x_0, t_0) > 0$ деген жорамалға қайшы. Сондықтан V_T -де мұндай нүкте болмайды. Дәлелденді. $\square$

Теорема 2

$u(x, t) \in C_{x,t}^{2,1}(\mathbb{R}^n \times (0; T])$ және

$$u_t(x, t) - a^2 \Delta_x u(x, t) = 0,$$

болсын. Онда максимум принципі орындалады:

$$\inf_{x \in \mathbb{R}^n} u(x, 0) \leq u(x, t) \leq \sup_{x \in \mathbb{R}^n} u(x, 0), \quad (x, t) \in \mathbb{R}^n \times (0; T].$$

Дәлелдеу

Теңсіздіктің оң бөлігін ғана дәлелдейміз. Негізгі идея — дәлелдеуді шектеулі облысқа келтіру және барьерлік функция пайдалану.

Кез келген $\lambda > 0$ үшін

$$w_\varepsilon(x, t) = e^{-\lambda t} [u(x, t) - \varepsilon(|x|^2 + 2na^2t)],$$

функциясын қарастырайық, мұндағы $\varepsilon > 0$. Тексерейік:

$$L_\lambda w_\varepsilon = w_{\varepsilon,t} - a^2 \Delta_x w_\varepsilon + \lambda w_\varepsilon \leq 0.$$

Шынында да:

$$L_\lambda w_\varepsilon(x, t) = -e^{-\lambda t} \varepsilon \lambda (|x|^2 + 2na^2 t) \leq 0.$$

$D_R = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < R\}$ болсын. Лемма 1 бойынша:

$$w_\varepsilon(x, t) \leq \max \left(\sup_{|x|=R, t \in [0, T]} w_\varepsilon, \sup_{x \in D_R} w_\varepsilon(x, 0) \right) < C.$$

Демек,

$$u(x, t)e^{-\lambda t} - \varepsilon(|x|^2 + 2na^2 t) < C, \quad (x, t) \in \mathbb{R}^n \times (0; T].$$

$R \rightarrow \infty$, содан кейін $\varepsilon \rightarrow 0$, $\lambda \rightarrow 0$ өтулерінен кейін аламыз:

$$u(x, t) \leq \sup_{x \in \mathbb{R}^n} u(x, 0).$$

Теорема дәлелденді. $\square$

Студенттерге қосымша әрі толыққанды мәліметтер алу үшін [1], [2], [3], [4], [5], [6], [7] әдебиеттер ұсынылады.

Список литературы

- [1] Токибетов Ж.А., Хайруллин Е.М. Математикалық физика теңдеулері. Астана, 2010 ж. 8
- [2] Михлин С.Г. Курс математической физики. М., 1968. 8
- [3] Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М., 1984. 8
- [4] Орынбасаров М.О., Оршубеков Н.Ә. Математикалық физика теңдеулері. Алматы, 2009 ж. 8
- [5] Орынбасаров М.О., Сахаев Ш.С. Математикалық физика теңдеулерінің есептері мен жаттығулар жинағы. Алматы, 2009 ж. 8
- [6] Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М., 2006. 8
- [7] Хомпыш Х. Математикалық физика теңдеулері. Алматы, Қазақ Университеті, 2017 ж. 215 б. 8